TECHNIQUES DE CALCUL D'INTÉGRAL

1/ $\int \ln(a+x)\,dx$, $a \geq 0$

Intégration par partie, on pose: $u(x) = \ln(a+x)$; $v'(x) = 1$

2/ $\int P(x).\ln(a+x)\,dx$; $a \geq 0$; $d°(P) = n \in \mathbb{N}^*$

I.P.P. on pose: $u(x) = \ln(a+x)$ et $v'(x) = P(x)$

3/ $\int P(x).e^{ax}\,dx$; $d°(P) = n \in \mathbb{N}^*$

I.P.P, on pose: $u(x) = P(x)$ et $v'(x) = e^{ax}$ [n ⇒ I.P.P]

4/ $\int P(x).\cos(ax)\,dx$ ou $\int P(x).\sin(ax)\,dx$; $d°(P) = n \in \mathbb{N}^*$, $a \neq 0$.

I.P.P : $u(x) = P(x)$ et $v'(x) = \cos(ax)$ ou $\sin(ax)$ [n ⇒ I.P.P]

5/ $\int R(x)\,dx$; R: fonction Rationnelle.

on se Ramène à des formes Simples:

- $\int \frac{u'(x)}{u(x)}\,dx = \ln|u(x)| + c$
- $\int \frac{u'(x)\,dx}{(u(x))^\alpha} = \frac{-1}{\alpha-1}\,\frac{1}{(u(x))^{\alpha-1}} + c$ $(\alpha \neq 1)$
- $\int \frac{1}{a^2+x^2}\,dx = \frac{1}{a}.\text{Arctg}\left(\frac{x}{a}\right) + c$ $(a \neq 0)$

6/ $\int R(e^x)\,dx$; R: fonction Rationnelle en e^x

on pose le changement de Variable:

$u = e^x \Rightarrow du = e^x\,dx$; (on se Ramène à l'integral 5).

formule de l'integration par partie:

$\int u'v\,dx = [u.v] - \int u v'\,dx$

7/ $\int P(\sin(x), \cos(x))$; P : Polynôme en $\sin(x)$ et $\cos(x)$:

$\Rightarrow I = \int \cos^p(x) \sin^q(x)\, dx$; p et q deux élément de $\mathbb{N}$.

- Si : $q = 2k+1$ "impaire" [on pose : $u = \cos(x) \Rightarrow du = -\sin(x)\,dx$]

$I = \int (\sin^2(x))^k \cos^p(x) \sin(x)\, dx = \int (1 - \cos^2(x))^k \cos^p(x) \sin(x)\, dx$

- Si : $p = 2k+1$ "impaire" [on pose : $u = \sin(x) \Rightarrow du = \cos(x)\, dx$]
- Si p et q les deux paire : Dans ce cas on a : $\cos(x)\sin(x) = \frac{\sin(2x)}{2}$

⚠ <u>En generale</u> : $I = \int f(x)\, dx \Rightarrow w(x) = f(x)\, dx$ [f : < $\cos(x)$ et $\sin(x)$]

- $u = \cos(x)$ Si $w(-x) = w(x)$
- $u = \sin(x)$ Si $w(\pi - x) = w(x)$
- $u = \tan(x)$ Si $w(\pi + x) = w(x)$

} Les Règles de Bioche.

8/ $\int R(\sin(x), \cos(x))\, dx$; R : fonction Rationnelle en $\sin x$ et $\cos x$:

on pose le changement de Variable :

$t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$, on a les formules :

$\cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2}$; $\sin(x) = \frac{2t}{1+t^2}$; $dt = \frac{2\,dt}{1+t^2}$

(et on se Ramène à 5)

9/ $\int R(\mathrm{Sh}(x), \mathrm{ch}(x))$; R : fonction Rationnelle en $\mathrm{Sh}\,x$ et $\mathrm{Ch}\,x$

on pose : $t = \mathrm{th}\left(\frac{x}{2}\right) \Rightarrow \mathrm{ch}(x) = \frac{1+t^2}{1-t^2}$; $\mathrm{Sh}(x) = \frac{2t}{1-t^2}$; $dt = \frac{2\,dt}{1-t^2}$

- $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$
- $\sin(2x) = 2\cos(x)\sin(x)$
- $\cos^2(x) = \frac{1+\cos(2x)}{2}$
- $\sin^2(x) = \frac{1-\cos(2x)}{2}$
- $\cos(\theta) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$
- $\sin(\theta) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$
- $\cos(x) = \frac{1 - tg^2\left(\frac{x}{2}\right)}{1 + tg^2\left(\frac{x}{2}\right)}$
- $\sin(x) = \frac{2\,tg\left(\frac{x}{2}\right)}{1 + tg^2\left(\frac{x}{2}\right)}$
- $\mathrm{Ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$; $\mathrm{Sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$
- $\mathrm{Ch}^2(x) - \mathrm{Sh}^2(x) = 1$

10/ $\int R(x, \sqrt{x^2+1})\, dx$: R: fonction Rationnelle contenant $\sqrt{x^2+1}$:

on pose : $x = Sh(t)$, $dx = Ch(t)\, dt \Rightarrow x^2+1 = Ch^2(t)$.
(et on se Ramène à 9)

11/ $\int R(x, \sqrt{x^2-1})\, dx$; R: " " contenant $\sqrt{x^2-1}$

on pose : $x = Ch(t)$; $dx = Sh(t)\, dt \Rightarrow x^2 - 1 = Sh^2(t)$
(et on se Ramène à 9)

12/ $\int R(x, \sqrt{1-x^2})\, dx$; R : " " contenant $\sqrt{1-x^2}$.

on pose : $x = \cos(t)$ ou $x = \sin(t)$, $\begin{cases} dx = -\sin(t)\, dt \\ dx = \cos(t)\, dt \end{cases}$ ou
$\Rightarrow 1 - x^2 = \sin^2(t)$ ou $\cos^2(t)$

13/ $\underbrace{\int \cos^{2n+1}(x)\, dx}_{I'}$ ou $\underbrace{\int \sin^{2n+1}(x)\, dx}_{I''}$

$I' = \int \cos^{2n}(x) \cos(x) dx = \int (1 - \sin^2(x))^n \cos(x)\, dx \Rightarrow$ on pose : $u = \sin(x)$.

$I'' = \int \sin^{2n}(x) \sin(x)\, dx = \int (1 - \cos^2(x))^n \sin(x)\, dx \Rightarrow$ on pose : $u = \cos(x)$.

14/ $\int \cos^{2n}(x)\, dx$ ou $\int \sin^{2n}(x)\, dx$

on utilise les formules de linéarisation :

$\cos^2(x) = \dfrac{1 + \cos(2x)}{2}$; $\sin^2(x) = \dfrac{1 - \cos(2x)}{2}$

Primitives usuelles

- $\int x^n \, dx = \frac{1}{n+1} \cdot x^{n+1} + cte \qquad (n \neq -1)$
- $\int \frac{u'(x)}{u(x)} \, dx = \ln |u(x)| + cte$
- $\int u'(x) \cdot u^a(x) = \frac{1}{a+1} \cdot u^{a+1}(x) + cte \qquad (a \neq -1)$
- $\int u'(x) \cdot e^{u(x)} \, dx = e^{u(x)} + cte$
- $\int \frac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}} \, dx = 2\sqrt{u(x)} + cte$
- $\int \frac{u'(x)}{u^2(x)} \, dx = \frac{-1}{u(x)} + cte$
- $\int \cos(ax+b) \, dx = \frac{1}{a} \sin(ax+b) + cte$.
- $\int \sin(ax+b) \, dx = \frac{-1}{a} \cos(ax+b) + cte$.
- $\int (1+\tan^2(x)) \, dx = \int \frac{dx}{\cos^2(x)} = \tan(x) + cte$
- $\int \frac{u'}{1+u^2} \, du = \text{Arctan}(u) + cte$.
- $\int \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}} \, du = \text{ArcSin}(u) + cte$
- $\int \frac{-u'}{\sqrt{1-u^2}} \, du = \text{Arccos}(u) + cte$
- $\int \frac{u'}{1-u^2} \, du = \text{Argth}(u) + cte$
- $\int \frac{u'}{\sqrt{u^2+1}} \, du = \text{ArgSh}(u) + cte$
- $\int \frac{u'}{\sqrt{u^2-1}} \, du = \text{ArgCh}(u) + cte$

- $\int \frac{u'}{u^2+a^2}\,du \;(a>0) = \frac{1}{a}\,\text{Arctan}\left(\frac{u}{a}\right) + cte$

- $\int \frac{u'}{\sqrt{a^2-u^2}}\,du = \text{Arcsin}\left(\frac{u}{a}\right) + cte$

- $\int \frac{u'}{\sqrt{u^2+a^2}}\,du = \text{ArgSh}\left(\frac{u}{a}\right) + cte.$

- $\int \frac{u'}{\sqrt{u^2-a^2}}\,du = \text{ArgCh}\left(\frac{u}{a}\right) + cte$

- $\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln(a)} + cte.$



والله ولي التوفيق
"Abdellah Hazm"